УДК 517:519.6 DOI 10.33111/mise.101.4

Гладка Ю.А., к.ф.-м.н., доцент,
доцент кафедри комп'ютерної математики та інформаційної безпеки,
ДВНЗ «КНЕУ імені Вадима Гетьмана»
Кінаш А.В., к.ф.-м.н., доцент,
доцент кафедри інформаційних технологій та інновацій,
Українсько-американський університет Конкордія
Харкянен О.В., к.т.н., доцент,
доцент кафедри інформаційних систем,
Національний університет харчових технологій

Gladka Y., PhD in Mathematics,
Associate Professor of the Department of Computer Mathematics
and Information Security,
SHEI KNEU named after V. Hetman
Kinash A., PhD in Mathematics,
Associate Professor of the Information Technologies
and Innovations Department,
Ukrainian-American Concordia University
Kharkianen O., PhD in Technology,
Associate Professor of the Department of Information Systems,
National University of Food Technologies (Kyiv, Ukraine)

ПРО МОДЕЛЮВАННЯ ОДНОГО КЛАСУ ДИНАМІЧНИХ ПРОЦЕСІВ

ABOUT SIMULATION OF ONE CLASS OF DYNAMIC PROCESSES

Анотація. *Метою роботи є розробка дискретних математичних алгоритмів для рівняння конвективної дифузії з явною організацією обчислень. Наявність у математичній моделі конвективного члена створює додаткові математичні труднощі при побудові та реалізації обчислювальних алгоритмів. Розглянуто задачу математичного моделювання нестаціонарних процесів конвективної дифузії і теплопровідності. Для чисельного розв'язання багатовимірних початково-крайових задач дифузії і теплопровідності запропоновано підхід, який використовує ідею розщеплення та реалізацію отриманих різницевих схем за допомогою явних схем біжучої хвилі, досліджено диференціаьні властивості функціонала якості, запропоновано ітераційний алгоритм визначення оптимального керування. У статті розвиваються методи математичного моделювання та оптимізації процесів дифузії (теплопровідності) у вигляді прямих та екстремальних завдань для багатовимірних параболічних рівнянь. Для чисельного розв'язання нестаціонарних рівнянь дифузії запропоновано підхід, який використовує ідею розщеплення та реалізацію отриманих різницевих схем за допомогою явних схем рахунку, що біжить. Розглянуто та досліджено питання побудови схем розщеплення, апроксимації та стійкості явних різницевих схем за початковими даними. Для чисельного розв'язання задачі оптимального керування вивчено диференціальні властивості функціоналу якості, запропоновано ітераційний алгоритм визначення оптимального керування. Реалізація запро-*

© Ю. А. Гладка, А. В. Кінаш,
О. В. Харкянен, 2021

понованого підходу до вирішення просторових нестаціонарних рівнянь дифузії на багатопроцесорних обчислювальних системах із розподіленою пам'яттю дозволить значною мірою скоротити часові витрати.
Ключові слова: *параболічне рівняння, чисельний метод, методи розщеплення, різницева схема, стійкість.*

Abstract. *The aim of the work is to develop discrete mathematical algorithms for the convective diffusion equation with explicit organization of calculations. The presence of a convective term in the mathematical model creates additional mathematical difficulties in the construction and implementation of computational algorithms. The problem of mathematical modeling of nonstationary processes of convective diffusion and thermal conductivity is considered. An approach using the idea of splitting and realization of the obtained difference schemes with the help of explicit traveling wave schemes is proposed for numerical solution of multidimensional initial-boundary diffusion and thermal conductivity problems. Differential properties of quality functional are investigated, iterative algorithm for optimal control. The article develops methods of mathematical modeling and optimization of diffusion (thermal conductivity) processes in the form of direct and extreme problems for multidimensional parabolic equations. For the numerical solution of non-stationary diffusion equations, an approach is proposed that uses the idea of splitting and realization of the obtained difference schemes with the help of explicit schemes of a running account. The question of construction of schemes of splitting, approximation and stability of explicit difference schemes according to initial data is considered and investigated. To numerically solve the problem of optimal control, the differential properties of the quality functional are studied, and an iterative algorithm for determining optimal control is proposed. The implementation of the proposed approach to solving spatial nonstationary diffusion equations on multiprocessor computing systems with distributed memory will significantly reduce time costs.*
Keywords: *parabolic equation, optimal control problem, numerical method, splitting methods, difference scheme, stability.*

Вступ. Основою технології математичного моделювання процесів з розподіленими параметрами є базові моделі та ефективні чисельні алгоритми розв'язання диференціальних рівнянь з частинними похідними, які базуються на використанні скінченно-різницевих, скінченно-об'ємних і скінченно-елементних апроксимацій по простору [1–6, 15–20]. Для обчислювальної практики значний інтерес являють методи факторизації та розщеплення [6, 16–20, 25], які дозволяють звести розв'язок вихідних задач до розв'язку рівнянь меншої розмірності.

Метою роботи є розробка дискретних математичних алгоритмів для рівняння конвективної дифузії з явною організацією обчислень. Наявність у математичній моделі конвективного члена створює додаткові математичні труднощі при побудові та реалізації обчислювальних алгоритмів.

В основі схем розщеплення перехід на новий часовий шар пов'язаний з розв'язанням ряду простіших задач. Запропонований підхід до побудови дискретних моделей використовує ідею розщеплення і реалізацію отриманих схем на основі явних схем біжучого рахунку, запропонованих у [7] для одновимірного рівняння дифузії. У роботі для побудованих різницевих схем біжучого розрахунку досліджені питання апроксимації та стійкості за початковими даними. З метою застосування запропонованих різницевих схем для чисельного моделювання та оптимізації нестаціонарних теплових і дифузійних процесів на основі різницевих схем з явною організацією обчислень.

У роботі для запропонованих різницевих схем з явною організацією обчислень досліджено питання апроксимації та стійкості за початковими даними. З метою використання запропонованих різницевих схем для чисельного розв'язання задач оптимального керування досліджені диференціальні властивості функціонала якості, запропонований ітераційний алгоритм визначення оптимального керування.

Питання побудови та дослідження стійкості різницевих схем розщеплення проілюструємо на прикладі крайової задачі для параболічного рівняння другого порядку вигляду

$$\frac{\partial u}{\partial t} = div(k\, grad\, u) + f,$$

яке є базовим при моделюванні та оптимізації численних нестаціонарних теплофізичних або дифузійних процесів [2, 3, 6].

Нехай у декартовій системі координат (x, y) на часовому інтервалі $0 < t \leq T$ функція $u(x, y, t)$ задовольняє у прямокутній області $G = \{(x, y)|, 0 < x < l_1, 0 < y < l_2\}$ з межею ∂G двовимірному нестаціонарному параболічному рівнянню

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(k_1 \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(k_2 \frac{\partial u}{\partial y}\right) = f(x, y, t), (x, y) \in G, t \in (0, T], \quad (1)$$

у якому $u(x, y, t)$ — шукана функція (характеристика досліджуваних процесів), коефіцієнти $k_\alpha = k_\alpha(x, y) > \chi > 0, \alpha = 1{,}2$ — додатні неперервно-диференційовані функції, $f(x, y, t)$– функція розподілу джерел. Рівняння (1) доповнюється граничними та початковою умовами.

Сформулюємо математичну постановку задачі оптимального керування для параболічного рівняння (1) у випадку, коли потрібно знайти характеристики розподіленої системи із заданими властивостями.

Для задач керування процесами дифузії (теплофізики), що протікають у деякій обмеженій однозв'язній області G з межею

∂G на часовому відрізку $0 < t \leq T$, стан розподіленої системи описується параболічним рівнянням

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(k_1 \frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(k_2 \frac{\partial u}{\partial y}) = f(x, y, t) + v(x, y, t),$$

$$(x, y) \in G, t \in (0, T], \qquad (2)$$

де $f(x, y, t)$ — задана функція, $v(x, y, t)$ — керуюча функція, $k_1(x, y, k_2(x, y)$ — задані додатні функції, $k_б(x, y) >$ ▯_ > 0, $б = 1,2$.

Для рівняння (2) будемо розглядати початкову

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \ (x, y) \in G \qquad (3)$$

та граничну

$$\left(\frac{\partial u}{\partial N} + в(x, y, t)u\right)\Big|_{\partial G} = y(x, y, t), \ (x, y) \in \partial G \ ,0 < t \leq T \qquad (4)$$

умови відповідно.

Математичну постановку екстремальної задачі сформулюємо як розв'язок задачі мінімізації деякого функціонала з метою забезпечення мінімального відхилення характеристик модельованого поля від заданих в області G. При цьому в якості керування приймається розподіл $v(x, y, t)$ у правій частині параболічного рівняння (2).Тоді одну із екстремальних задач можна сформулювати таким чином. Потрібно знайти допустиме керування $v = v_0(x, y, t)$ та відповідний йому розв'язок $u = u_0(x, y, t)$ задачі (2) — (4), щоб функціонал

$$J_e(v) = \int_G (u(x, y, T) - h(x, y))^2 dxdy + \frac{1}{e^2}\int_0^T dt \int_G v^2(x, y, t)\, dxdy \qquad (5)$$

приймав найменше можливе значення.

Тут T — фіксований момент часу, $h(x, y)$ — задана функція, $v(x, y, t)$ — керування з деякої опуклої замкнутої множини $U = \{\ v(x, y, t) \in L_2(Q)\}$, де $L_2(Q)$ — простір дійсних функцій, інтегровних з квадратом в області

$$Q = \{(x, y, t)|, 0 < x < l_1, 0 < y < l_2, \ 0 < t \leq T\}.$$

Скалярний добуток і норма в $L_2(Q)$ визначаються за формулою

$$(u, v) = \int_Q u(x, y, t)v(x, y, t)dG\text{▯黴}t, \ \|v\| = \frac{(v,v)1}{2} =$$

$$= \left(\int_Q \ v\,(x, y, t)^2 dGdt\right)^{1/2} . \qquad (6)$$

Відмітимо, що для виділення обмеженого розв'язку в функціонал якості (5) додано стабілізуючий функціонал $\frac{1}{\varepsilon^2}\|v\|^2$при деякому заданому $e > 0$.

Будемо розглядати задачу керування без обмежень ($U = H = L_2(Q)$), т.ч. оптимізаційна задача полягає у визначенні керування w, при якому функціонал (5) досягає своєї нижньої грани

$$J_e(w) = \inf_{v \in H} J_e(v).$$

Схема розщеплення. Для чисельного розв'язку багатовимірних задач розроблена велика кількість обчислювальних алгоритмів, які базуються, в основному, на методах розщеплення [6, 8, 16]. При цьому значний інтерес представляє побудова різницевих схем розщеплення із заданими властивостями, зокрема, з явною організацією обчислень.

Двокрокова схема розщеплення. Викладемо підхід до побудови різницевих схем розщеплення на вирішення багатовимірних завдань з прикладу двокрокової схеми розщеплення для початково-крайової задачі (1), (3) і (4).

У рамках цього підходу двокрокову схему розщеплення на диференціальному рівні можна отримати, представляючи параболічне рівняння (1) в операторному вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (L_1 + L_2)u = f \tag{7}$$

Нехай для деякого моменту часу t рішення рівняння (7) відомо, тоді для моменту $\hat{t} = t + \tau$ відоме ⍰ ‹$(x, y, \hat{t})$ можна подати за допомогою ряду Тейлора у вигляді:

$$u(x,y,\hat{t}) = u(x,y,t) + \phi \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} + O(\phi^2) =$$
$$= [E - \phi L_1 - \phi L_2]u(x,y,t) + \phi f + O(\phi^2). \tag{8}$$

Розглянемо дві допоміжні задачі:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + L_1 u_1 = \frac{1}{2} f,\ u_1(x,y,t) = u(x,y,t), \tag{9}$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} + L_2 u_2 = \frac{1}{2} f, u_2(x,y,t) = u_1(x,y,\hat{t}). \tag{10}$$

Легко бачити, що розв'язання завдань (9), (10) можна записати у вигляді $u_1(x,y,\hat{t}) = [E - \tau L_1]u_1(x,y,t) + \frac{\tau}{2}f + O(\tau^2)$, $u_2(x,y,\hat{t}) = [E - \phi L_2]u_2(x,y,t) + \frac{\phi}{2}f + O(\phi^2)$.

Враховуючи, що $u_2(x,y,t) = u_1(x,y,\hat{t})$, маємо

$$u_2(x,y,\hat{t}) = [E - \phi L_1 - \phi L_2]u(x,y,t) + \phi f + O(\phi^2\,). \qquad (11)$$

Приймаючи $u(x,y,\hat{t}) = u_2(x,y,\hat{t})$ і порівнюючи вирази (8) і (11), приходимо до твердження, що вирішуючи послідовно задачі (9), (10) отримуємо рішення рівняння (7) для моменту часу $\hat{t}$ з похибкою O(ϕ2).

Задача оптимального керування. Чисельні методи, розроблені на вирішення прямих завдань виду (1) — (3), застосовуються на вирішення зворотних завдань, завдань оптимального керування та інших.

Для задачі оптимального керування (2) — (5) з метою отримання умов оптимальності та використання градієнтних методів оптимізації досліджуємо диференціальні властивості критерію якості (5). Покажемо, що функціонал (5) диференційований у довільній точці $v \in U$. Для цього оцінимо головну лінійну частину збільшення функціоналу $\Delta J_\varepsilon(v) = J_\varepsilon(v + \delta v) - J_\varepsilon(v)$ залежно від збільшення керування v.

Задамо керуванню $v(x,y,t)$ деяке збільшення $\delta v = \delta v(x,y,t)$ та позначимо через $\delta u = \delta u(x,y,t)$ відповідне йому збільшення функції $u = u(x,y,t)$.

Легко бачити, що збільшення рішення $\delta u(x,y,t)$ задовольняє початково-крайову задачу ($k_1 = k_2 = k$)

$$\frac{\partial \delta u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial \delta u}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial \delta u}{\partial y}) = \delta v(x,y,t),(x,y) \in G, t \in (0,T], \quad (12)$$

$$\left(k\frac{\partial\, \delta u}{\partial n} + \beta(x,y,t)\delta u\right)\Big|_{\partial G} = 0,\ (x,y) \in \partial G\ ,0 < t \le T, \qquad (13)$$

$$\delta u(x,y,0) = 0,\ \ (x,y) \in G\ . \qquad (14)$$

Тоді вираз для збільшення функціоналу (5) можна записати у вигляді

$$ДJ_e(v) = \int_G \Big[\ \big(u(x,y,T) + \partial u(x,y,T) - h(x,y)\big)^2$$
$$- (u(x,y,T) - h(x,y))^2\Big]\,dxdy +$$
$$+\frac{1}{e^2}\int_0^T dt \int_G [(v(x,y,t) + \partial v(x,y,t))^2 - v^2(x,y,t)]\,dxdy.$$

Приймаючи до уваги, що

$$(u(x,y,T)+\partial u(x,y,T)-h(x,y))^2-(u(x,y,T)-h(x,y))^2=$$
$$=2\partial u(x,y,T)[u(x,y,T)-h(x,y)]+\partial u^2(x,y,T),$$
$$(v(x,y,t)+\partial v(x,y,t))^2-v^2(x,y,t)=2v(x,y,t)\partial v(x,y,t)+$$
$$+\partial v^2(x,y,t),$$

збільшення функціоналу набуває вигляду

$$ДJ_e(v)=2\int_G[u(x,y,T)-h(x,y)]\partial u(x,y,T)dxdy$$
$$+\ \frac{2}{e^2}\int_0^T dt\int_G v(x,y,t)\partial v(x,y,t)\,dxdy+$$
$$+\int_G(\partial u(x,y,T))^2dxdy+\ \frac{1}{e^2}\int_0^T dt\int_G(\partial v(x,y,t))^2\,dxdy \qquad (15)$$

Щоб остаточно визначити вираз для головної лінійної частини, введемо до розгляду пов'язану функцію $\psi(x,y,t)$ як рішення в області Q деякої початково-крайової задачі. Класична процедура виведення парного оператора полягає в наступному. Обидві частини рівняння (12)

$$L\delta u=\delta v,\, Lu=\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial u}{\partial x})-\frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial u}{\partial y})$$

множаться на функцію $ш(x,y,t)$ та інтегруються в часі та просторі в межах, обумовлених постановкою задачі:

$$\int_0^T dt\int_G ш\ \left[\frac{\partial \partial u}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial \partial u}{\partial x})-\frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial \partial u}{\partial y})\right]dxdy=\int_0^T dt\int_G ш\partial v\,dxdy\ (16).$$

Далі проведемо перетворення (16) з метою ввести функцію $\psi(x,y,t)$ у диференціальні вирази замість ∂u. Інтегруючи частинами, для першого доданку в (16) з урахуванням початкової умови (3) знаходимо

$$\int_0^T dt\int_G\psi\frac{\partial\delta u}{\partial t}dxdy=\int_G\psi\delta u|_{t=0}^{T}dxdy-$$
$$-\int_0^T dt\int_G\delta u\frac{\partial\psi}{\partial t}dxdy=\ \int_G\psi\delta u|_{t=T}dxdy-$$
$$-\int_0^T dt\int_G\delta u\frac{\partial\psi}{\partial t}dxdy\,. \qquad (17)$$

Застосовуючи першу формулу Гріна [22] і враховуючи граничну умову (4), в результаті перетворення еліптичного оператора на (16) послідовно отримуємо

$$\int_0^T dt \int_G ш \left[-\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial \partial u}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial \partial u}{\partial y})\right] dxdy$$
$$= \int_0^T dt \int_G k \left[\frac{\partial ш}{\partial x}\frac{\partial \partial u}{\partial x} + \frac{\partial ш}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right] dxdy$$
$$- \int_0^T dt \int_{\partial G} шk \frac{\partial \partial u}{\partial n} ds =$$
$$= \int_0^T dt \int_G k \left[\frac{\partial ш}{\partial x}\frac{\partial \partial u}{\partial x} + \frac{\partial ш}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right] dxdy + \int_0^T dt \int_{\partial G} вш\partial u ds, \qquad (18)$$

$$\int_0^T dt \int_G \partial u \left[-\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial ш}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial ш}{\partial y}\right)\right] dxdy = \int_0^T d\square\ \langle$$
$$\int_G k \left[\frac{\partial ш}{\partial x}\frac{\partial \partial u}{\partial x} + + \frac{\partial ш}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right] dxdy - \int_0^T dt \int_{\partial G} \partial uk \frac{\partial ш}{\partial n} ds\,. \qquad (19)$$

Таким чином, з (16) — (19) випливає перетворений вираз

$$\int_G ш\partial u|_{t=T} dxdy$$
$$+ \int_0^T dt \int_G \partial u \left[-\frac{\partial ш}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial ш}{\partial x})\right.$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial ш}{\partial y})\right] dxdy + \int_0^T dt \int_{\partial G} вш\partial u ds =$$
$$= -\int_0^T dt \int_{\partial G} \partial uk \frac{\partial ш}{\partial n} ds \ + \int_0^T dt \int_G ш\partial v\, dxdy. \qquad (20)$$

Звідси випливає, що ввівши функцію $ш(x, y, t)$ як рішення спряженого рівняння

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial \square 焼}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial \psi}{\partial y}) = 0,\ (x, y) \in G, t \in (0, T] \qquad (21)$$

з граничною умовою

$$\left(k\frac{\partial\ \psi}{\partial n} + \beta\psi\right)\Big|_{\partial G} = 0,\ (x, y) \in \partial G,\ \ 0 < t \leq T, \qquad (22)$$

вираз (20) набуває вигляду

$$\int_G шдu|_{t=T}dxdy = \int_0^T dt \int_G шдv\, dxdy\ . \qquad (23)$$

Якщо визначити початкову умову для ретроспективної задачі формулою

$$ш|_{t=T} = u(x,y,T) - h(x,y), \qquad (24)$$

то з (23) випливає

$$\int_G (u(x,y,T) - h(x,y))\partial u|_{t=T}dxdy = \int_0^T dt \int_G шдv\, dxdy. \quad (25)$$

На підставі (25), збільшення функціоналу (15) можна переписати у вигляді

$$\Delta J_e(v) = 2\int_0^T dt \int_G \left[ш + \frac{1}{e^2}v\right]\partial v\, dxdy + o\|\partial u\| + o\|\partial v\|. \quad (26)$$

Звідси випливає диференційованість функціоналу $J_\varepsilon(v)$ по v в просторі $L_2(Q)$

Таким чином, встановлено таку теорему.

Теорема. Функціонал (5) диференційований по Фреше у просторі $L_2(Q)$. Градієнт функціоналу визначається через спряжений стан, виразом:

$$gradJ_e(v) = 2\left(ш(x,y,t) + \frac{1}{e^2}v(x,y,t)\right). \qquad (27)$$

де $ш$ — рішення спряженої задачі (21), (22), (24).

Умова оптимальності задачі оптимального керування $gradJ_e(v) = 0$

з урахуванням (27) набуває вигляду

$$\left(\psi(x,y,t) + \frac{1}{\varepsilon^2}v(x,y,t)\right) = 0,\ (x,y) \in G, t \in (0,T].$$

З викладеного слідує, що з визначення градієнта необхідно при фіксованому отримати рішення двох крайових завдань. Спочатку за допомогою прямої задачі (2)–(4) слід визначити функцію $u(x,y,t)$, а потім із (21), (22), (24) знайти значення спряженої функції.

Наближене рішення задачі оптимального керування можна отримати, використовуючи градієнтні методи [6, 23, 24], а також викладену вище методику побудови різницевих схем біжучого рахунку для чисельного розв'язання прямої диференціальної задачі. Зазначимо, що двокрокові різницеві схеми можуть бути безпосередньо застосовані і для чисельного вирішення спряжених задач.

Висновки. У статті розвинено методи математичного моделювання та оптимізації процесів дифузії (теплопровідності) у вигляді прямих та екстремальних завдань для багатовимірних параболічних рівнянь. Для чисельного розв'язання нестаціонарних рівнянь дифузії запропоновано підхід, який використовує ідею розщеплення та реалізацію отриманих різницевих схем за допомогою явних схем рахунку, що біжить. Розглянуто та досліджено питання побудови схем розщеплення, апроксимації та стійкості явних різницевих схем за початковими даними. Для чисельного розв'язання задачі оптимального керування вивчено диференціальні властивості функціоналу якості, запропоновано ітераційний алгоритм визначення оптимального керування. Реалізація запропонованого підходу до вирішення просторових нестаціонарних рівнянь дифузії на багатопроцесорних обчислювальних системах із розподіленою пам'яттю дозволить значною мірою скоротити часові витрати.

Бібліографічні посилання

1. Марчук Г. И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. Москва. Наука, 1982. 320 с.

2. Егоров, А.И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. Москва. Наука, 1978. 463 с.

3. Егоров, А.И. Основы теории управдения. Москва. Физматгиз, 2004. 504 с.

4. Згуровский М.З., Скопецкий В.В., Хрущ В.К., Беляев Н.Н. Численное моделирование распространения загрязнения в окружающей среде. Киев: Наук. думка. 1997. 368 с.

5. Сергиенко И.В., Скопецкий В.В., Дейнека В.С. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах. Киев, Наук. думка, 1991. 432 с.

6. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. Москва. Едиториал УРСС, 2003. 784 с.

7. Саульев В.К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. Москва. Физматгиз, 1960. 324 с.

8. Samarskii A.A., Vabishchevich P.N. Numerical methods for solving inverse problems of mathematical physics. Berlin.Walter de Gruyter, 2007. 438 p.

9. Vabishchevich P. N. and Vasil'ev V. I., Computational algorithms for solving the coefficient inverse problem for parabolic equations. *Inverse Probl. Sci. Engin.* 2016. Vol.24. N. 1, P. 42–59.

10. Вабищевич П.Н., Васильева М.В., Васильев В.И. Вычислительная идентификация правой части параболического уравнения. *Журн. вычисл. матем. и матем. физики*, 2015. Т. 55, N 6. С. 1020–1027.

11. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. Москва. Наука, 1977. 440 с.

12. Агошков В.И. Методы оптимального управления и сопряженных кравнений в задачах математической физики. Москва. ИВМ РАН, 2004. 256 с.

13. Дейнека В.С., Сергиенко И.В. Модели и методы решения задач в неоднородных средах. Киев, Наук. думка, 2001. 606 с.

14. Ильин В.П. Методы конечных разностей и конечных объемов для эллиптических уравнений. Новосибирск. Изд. ИМ СО РАН, 2001. — 318 с.

15. Vabishchevich P. N., Zakharov P.E. Explicit-implicit splitting schemes for parabolic equations and systems. *Numerical methods and applications. Springer,* 2015, P. 157-166.

16. Марчук Г. И. Методы расщепления. Москва. Наука, 1988. 264 с.

17. Gladky A. V. Stability of difference splitting schemes for convection diffusion equation. *Cybernetics and Systems Analysis.* 2017. Vol. 53, No. 2. P. 193–203.

18.Gladky A. V. Analysis of splitting algorithms in convection–diffusion problems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2014. Vol. 50. N. 4. P. 548–559.

19. Vabishchevich P.N. On a new class of additive (splitting) operator_difference schemes. Math. Comput. 2012.Vol. 81. N. 277. P. 267–276.

20. Vabishchevich P. N. Flux-splitting schemes for parabolic problems. Computational *Mathematics and Mathematical Physics*.2012. Vol. 52. N. 8. P. 1128–113.

21. Самарский А.А., Гулин А.В. Устойчивость разностных схем. Москва. Наука, 1973. 416 с.

22. Г. И. Марчук, Агошков В.Н. Введение в проекционно-сеточные методы. Москва. Наука, 1981.416 с.

23. Алифанов, О.М. Экстремальные методы решения некорректных задач. Москва. Наука, 1988. 288 с.

24. Васильев П. Ф. Методы оптимизации. М.: Факториал Пресс, 2002. — 824 с.

25. Гладкий А.В., Гладкая Ю.А. Об одной схеме расщепления в задачах диффузии и теплопроводности. *Кибернетика и системный анализ,* 2019. Т. 55. №6. С.122-133.

Статтю подано до редакції 21.11.2021